12 may 2010

Realisierbarkeit

[Dekoration der Verknüpfungen $\longrightarrow \begin{cases} \to^c \\ \to^{nc} \end{cases}$ und $\forall \begin{cases} \forall^c & \text{rechnerisch} \\ \forall^{nc} & \text{nicht rechnerisch} \end{cases}$

Beispiel: Die ~~ma~~ Algebra der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \mu_\xi(\underbrace{\xi}_{\substack{!!\\ 0 \\ \text{Null}}},\ \underbrace{\xi \to \xi}_{\substack{!!\\ S \\ \text{Nachfolger}}})$$

wie letztes Mal

Totalität auf $\mathbb{N}$: (erst undekoriert hinschreiben)

$T0 \qquad \forall_n^{nc}(Tn \to^c T(Sn))$ Einführungsaxiome

$\forall_n^{nc}(Tn \to^c P0 \to^c \forall_n^{nc}(Tn \to^c Pn \to^c P(Sn)) \to^c Pn)$ Elimination Beseitigung]

Durch Dekoration ändert sich die logische Bedeutung nicht, nur der rechnerische Gehalt $\Rightarrow$ diesen kann man so regeln.

Wissen nun: Wenn Tr gilt, kann man das anhand der Klauseln nachvollziehen.

Letztes Mal: Ind. Def. von Prädikaten und Formeln $\Rightarrow$ Handout gilt weiterhin

Nun muss auch die Theorie berechenbarer Funktionale ($\Rightarrow$ Handout) angepasst werden: Einführung und Elimination von $\to^c$, $\forall^c$ bleibt gleich, Elimination von $\to^{nc}$, $\forall^{nc}$ auch.

- $\to^{nc}$, $\forall^{nc}$ dürfen nur unter bestimmten Umständen eingeführt werden: Annahmen/Objektvariablen sollen nicht rechnerisch sein.

Def.: Rechnerische Objektvariablen M^A Herleitung

$CV(M^A) := \emptyset$ falls A c.i.

$CV(c^A) := \emptyset \qquad (c^A \text{ Axiom})$

$CV(u^A) := \emptyset$

$CV((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to^c B}) := CV((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to^{nc} B}) := CV(M)$

$CV((M^{A \to^c B} N^A)^B) := CV(M) \cup CV(N)$

$CV((M^{A \to^{nc} B} N^A)^B) := CV(M)$

Rechnerische Annahmevariablen

$CA(M^A) := \emptyset$ falls A c.i.

$CA(c^A) := \emptyset \qquad (c^A \text{ Axiom})$

$CA(u^A) := \{u\}$!

$CA((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to^c B}) := CA((\lambda_{u^A} M^B)^{A \to^{nc} B}) := CA(M^A) \setminus \{u\}$!

$CA((M^{A \to^c B} N^A)^B) := CA(M) \cup CA(N)$

$CA((M^{A \to^{nc} B} N^A)^B) := CA(M)$

$CV(((\lambda_x M^A)^{\forall^c_x A}) := CV((\lambda_x M^A)^{\forall^{uc}_x A}) := CV(M) \setminus \{x\}$!

$CA((\lambda_x M^A)^{\forall^c_x A}) := CA((\lambda_x M^A)^{\forall^{uc}_x A}) := CA(M)$

$CV((M^{\forall^c_x A(x)} r)^{A(r)}) := CV(M) \cup FV(r)$!

$CV((M^{\forall^{uc}_x A(x)} r)^{A(r)}) := CV(M)$

$CA((M^{\forall^c_x A(x)} r)^{A(r)}) := CA((M^{\forall^{uc}_x A(x)} r)^{A(r)}) := CA(M)$

– (! Erklären)

Einführungsregeln für $\to^{uc}$, $\forall^{uc}$

(i) M^B Herleitung und $u^A \notin CA(M)$, dann ist auch $(\lambda_{u^A} M^B)^{A \to^{uc} B}$ eine Herl.

(ii) M^A Herleitung, x nicht frei in einer Formel einer freien Annahme(variable) von M und $x \notin CV(M)$, dann ist auch $(\lambda_x M^A)^{\forall^{uc}_x A}$ Herleitung.

Dekoration ist in verschiedenen Arten möglich. Wann ist sie stärker?

Es soll gelten $\vdash A' \to^c A$

Def.: A' ist rechnerische Verstärkung von A: $A' \sqsupseteq A$. $\sqsupseteq$ Reflexiv, transitiv und:

(i) $(A \to^{uc} B) \sqsupseteq (A \to^c B)$

(ii) $(A \to^c B) \sqsupseteq (A \to^{uc} B)$ falls A c.i.

(iii) $(A \to B') \sqsupseteq (A \to B)$ falls $B' \sqsupseteq B$

(iv) $(A \to B) \sqsupseteq (A' \to B)$ falls $A' \sqsupseteq A$

$\Big\} \to \begin{cases} \to^c \\ \to^{uc} \end{cases}$

(v) $\forall^{uc}_x A \sqsupseteq \forall^c_x A$

(vi) $\forall_x A' \sqsupseteq \forall_x A$ falls $A' \sqsupseteq A$ $\quad \forall \begin{cases} \forall^c \\ \forall^{uc} \end{cases}$

Satz: Falls $A' \sqsupseteq A$, dann $\vdash A' \to^c A$.

Bew.: Reflexivität, Transitivität klar.

(i)
$$\dfrac{\dfrac{A \to^{uc} B \qquad [u : A]}{B}}{A \to^c B}\,(\to^c)^+, u$$

(iii)
$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} M \mid \text{Annahme} \\ B' \to^c B \end{matrix} \qquad \dfrac{A \to^{uc} B' \qquad [u : A]}{B'}}{B}}{A \to^{uc} B}\,(\to^{uc})^+, u \quad \text{VB: } u \notin CA(M)$$

(iv)
$$\dfrac{\dfrac{A \to^{uc} B \qquad \dfrac{\begin{matrix} M \mid \text{Annahme} \\ A' \to A^c \end{matrix} \qquad [u : A']}{A}}{B}}{A' \to^{uc} B}\,(\to^{uc})^+, u \quad \text{VB: } u \notin CA(M)$$

$\square$

Dekoration induktiver Definitionen

Induktiv definierte Prädikate sind i. A. c.r., ihre Axiome müssen achtsam dekoriert werden: ~~Alle~~ In allen Klauseln sollen die $\rightarrow$ nach der rekursiven Prämisse rechnerisch sein.

Handout $\Rightarrow$ (Intro)/(Elim)

Wir betrachten nun eine Formel A als rechnerischer Problem. Wie sieht die Lösung eines solchen für ein rekursives Prädikat aus?

<u>Bsp.:</u> $\mathrm{Even}(0) \qquad \forall^{nc}_n (\mathrm{Even}(n) \rightarrow^c \mathrm{Even}(S(S(n))))$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad \mathrm{Even}(6) \\
\qquad\qquad\quad / \\
\qquad\qquad \mathrm{Even}(4) \\
\qquad\quad / \\
\qquad \mathrm{Even}(2) \\
\quad / \\
\mathrm{Even}(0)
\end{array}
$$

Um solche "Generationsbäume" allg. zu untersuchen, lässt man die Klauseln von I eine Algebra erzeugen.

<u>Def.:</u> Typ $\tau(A)$ einer Formel A:

$$\tau(I\vec{r}) := \begin{cases} \iota & \text{falls } I \text{ c.r.} \\ \circ & \text{falls } I \text{ c.i.} \end{cases}$$

$$\tau(A \rightarrow^c B) := (\tau(A) \rightarrow \tau(B)) \qquad \tau(\forall^c_{x^\rho} A) := \rho \rightarrow \tau(A)$$

$$\tau(A \rightarrow^{nc} B) := \tau(B) \qquad \tau(\forall^{nc}_{x^\rho} A) := \tau(A)$$

$$(\rho \rightarrow \circ) := \circ \qquad (\circ \rightarrow \sigma) := \sigma \qquad (\circ \rightarrow \circ) := \circ$$

<u>Def.:</u> Algebra ι_I von Zeugen:
Jede Klausel erzeugt einen Konstruktortyp $\kappa_i = \tau(K_i)$, relativ zu $\tau(X\vec{r}) = \xi$.
Dann $\iota_I := \mu_\xi(\vec{\kappa})$.

Bsp.: ι_{Even}

$$\tau(Even(0)) = \xi$$

$$\tau(\forall_n^{nc}(Even(n) \to^c Even(S(S(n))))) =$$

$$= \tau(Even(n) \to^c Even(S(S(n))))$$

$$= \tau(Even(n)) \to \tau(Even(S(S(n))))$$

$$= \xi \to \xi$$

$$\Rightarrow \iota_{Even} = \mu_\xi(\underset{0}{\xi}, \underset{S}{\xi \to \xi}) \simeq \mathbb{N}$$

Welche induktiv definierten Prädikate sind c.i.?

(i) Für jedes I ein bezeugendes Prädikat I^r
("es gibt einen Realisator für I") (nächstes Mal def./erläutert)

(ii) Eq, $\exists^{nc}$, $\wedge^{nc}$

Def.: $t \mathrel{r} A$ "t realisiert A", t vom Typ $\tau(A)$

$$t \mathrel{r} I\vec{s} := I^r t\vec{s}$$

$$t \mathrel{r} (A \to^c B) := \forall_x^{nc}(x \mathrel{r} A \to^{nc} tx \mathrel{r} B) \quad \text{falls } A \text{ c.i.} \; = \varepsilon \mathrel{r} A \to^{nc} B(\varepsilon)$$

$$t \mathrel{r} (A \to^{nc} B) := \forall_x^{nc}(x \mathrel{r} A \to^{nc} t \mathrel{r} B)$$

$$t \mathrel{r} (\forall_x^c A) := \forall_x^{nc}(tx \mathrel{r} A)$$

$$t \mathrel{r} (\forall_x^{nc} A) := \forall_x^{nc}(t \mathrel{r} A)$$

Für ε gilt: $\varepsilon t := \varepsilon$, $t\varepsilon := t$, $\varepsilon\varepsilon := \varepsilon$

$$\varepsilon \mathrel{r} I^r t\vec{s} := I^r t\vec{s}$$

$$\varepsilon \mathrel{r} Eq(t,s) := Eq(t,s)$$

$$\varepsilon \mathrel{r} \exists_x^{nc} A := \exists_{x,y}^{nc}(y \mathrel{r} A)$$

$$\varepsilon \mathrel{r} (A \wedge^{nc} B) := \exists_x^{nc}(x \mathrel{r} A) \wedge^{nc} \exists_y^{nc}(y \mathrel{r} B)$$

Bem.: Falls A c.i. sind $A \to^{c} B$ und $A \to^{nc} B$ nachweisch äquivalent.

$$t \mathbf{r} (A \to^{c} B) = \forall^{nc}_{x}(x \mathbf{r} A \to^{nc} tx \mathbf{r} B) = \varepsilon \mathbf{r} A \to^{nc} t \mathbf{r} B$$

$$t \mathbf{r} (A \to^{nc} B) = \forall^{nc}_{x}(x \mathbf{r} A \to^{nc} t \mathbf{r} B) \quad /\!/$$

Analog $\varepsilon \mathbf{r} \forall^{c}_{x} A$ und $\varepsilon \mathbf{r} \forall^{nc}_{x} A$ $(= \forall^{nc}_{x}(\varepsilon \mathbf{r} A))$

Daher gilt falls A c.i.:

$$t \mathbf{r} (A \to^{c} B) := \forall_{x}(x \mathbf{r} A \to tx \mathbf{r} B)$$
$$t \mathbf{r} (A \to^{nc} B) := \forall_{x}(x \mathbf{r} A \to t \mathbf{r} B)$$
$$t \mathbf{r} (\forall^{c}_{x} A) := \forall_{x}(tx \mathbf{r} A)$$
$$t \mathbf{r} (\forall^{nc}_{x} A) := \forall_{x}(t \mathbf{r} A)$$

evtl. kürzen, nur erwähnen

Bsp.: $t \mathbf{r}\, \mathrm{Even}(0) = \mathrm{Even}^{r}(\underset{0'}{\underset{\|}{t}}, 0)$

$$t \mathbf{r} \forall^{nc}_{n}(\mathrm{Even}(n) \to^{c} \mathrm{Even}(S(S(n))))$$
$$= \forall^{nc}_{n}(t \mathbf{r} (\mathrm{Even}(n) \to^{c} \mathrm{Even}(S(S(n)))))$$
$$= \forall^{nc}_{n} \forall^{nc}_{x}(x \mathbf{r}\, \mathrm{Even}(n) \to^{nc} tx \mathbf{r}\, \mathrm{Even}(S(S(n))))$$
$$= \forall^{nc}_{n} \forall^{nc}_{x}(\mathrm{Even}^{r}(x, n) \to^{nc} \mathrm{Even}^{r}(\underset{S'}{\underset{\|}{tx}}, S(S(n))))$$