Seminar Beweistheorie: Realisierbarkeit

Christian Neukirchen

Mittwoch, 12. Mai 2010

Induktive Definition von Prädikaten und Formeln

$$Y_l\vec{r} \in \mathrm{F}(\vec{Y}), \qquad \frac{A \in \mathrm{F} \quad B \in \mathrm{F}(\vec{Y})}{A \to B \in \mathrm{F}(\vec{Y})}, \qquad \frac{A \in \mathrm{F}(\vec{Y})}{\forall_x A \in \mathrm{F}(\vec{Y})}$$

$$\frac{C \in \mathrm{F}(\vec{Y})}{\{\vec{x} \mid C\} \in \mathrm{Preds}(\vec{Y})}, \qquad \frac{P \in \mathrm{Preds}(\vec{Y})}{P\vec{r} \in \mathrm{F}(\vec{Y})},$$

$$\frac{K_0, \dots, K_{k-1} \in \mathrm{Cl}_X(\vec{Y})}{\mu_X(K_0, \dots, K_{k-1}) \in \mathrm{Preds}(\vec{Y})} \quad (k \geq 1),$$

$$\frac{\vec{A} \in \mathrm{F}(\vec{Y}) \quad \vec{B}_0, \dots, \vec{B}_{n-1} \in \mathrm{F}}{\forall_{\vec{x}}(\vec{A} \to (\forall_{\vec{y}_\nu}(\vec{B}_\nu \to X\vec{s}_\nu))_{\nu<n} \to X\vec{t}\,) \in \mathrm{Cl}_X(\vec{Y})} \quad (n \geq 0).$$

Diese Definition gilt weiterhin für dekorierte Formeln, wenn man statt $\to$ entweder $\to^{\mathrm{c}}$ oder $\to^{\mathrm{nc}}$ und statt $\forall$ entweder $\forall^{\mathrm{c}}$ oder $\forall^{\mathrm{nc}}$ einsetzt.

Theorie berechenbarer Funktionale (TCF)

Axiome für jedes induktiv definierte Prädikat $I := \mu_X(K_0, \dots, K_{k-1})$:

(Intro) $\qquad \forall_{\vec{x}}(\vec{A} \to (\forall_{\vec{y}_\nu}(\vec{B}_\nu \to I\vec{s}_\nu))_{\nu<n} \to^{\mathrm{c}} I\vec{t}\,)$

(Elim) $\qquad \forall^{\mathrm{nc}}_{\vec{x}}(I\vec{x} \to^{\mathrm{c}} (K_i(I, P))_{i<k} \to^{\mathrm{c}} P\vec{x})$

wobei gilt

$$\begin{aligned} K_i(I, P) := \forall_{\vec{x}}(\vec{A} \to (\forall_{\vec{y}_\nu}(\vec{B}_\nu \to I\vec{s}_\nu))_{\nu<n} \to^{\mathrm{c}} \\ (\forall_{\vec{y}_\nu}(\vec{B}_\nu \to P\vec{s}_\nu))_{\nu<n} \to^{\mathrm{c}} P\vec{t}\,) \end{aligned}$$

Glossar

c.i.	*computationally irrelevant*, rechnerisch irrelevant
c.r.	*computationally relevant*, rechnerisch relevant
ι_I	Algebra von Zeugen des induktiv definierten Prädikates I
$I^{\mathbf{r}}$	Bezeugendes Prädikat von I („es gibt einen Realisator von I“)
$t\ \mathbf{r}\ A$	t realisiert A
$\tau(A)$	Typ einer Formel A
$\circ$	Nulltyp
ε	Nullterm
Eq	Leibniz-Gleichheit