Das Bayes-Theorem

Christian Neukirchen
Gleichwertige Leistungsfeststellung, Juni 2005

Ein lahmer Witz…

Heute im Angebot:

- Ein praktisches Beispiel zur Einleitung
- Überblick über Reverend Thomas Bayes
- Kurze Wiederholung der Wahrscheinlichkeiten
- Das Bayes-Theorem
- Übungsaufgabe
- Praktische Anwendung: Spamfilter

Brustkrebsdiagnose

- Zu Beginn eine praktische Anwendung:

  Die Bestimmung der Brustkrebswahrscheinlichkeit durch medizinische Tests.

- Tragt eure Schätzung auf die ausgeteilten Blätter ein… ohne Einfluss der Nachbarn.

Auswertung

- Jede Gruppe hatte die gleiche Aufgabe!
- Die Zahlenwerte waren nur anders skaliert, die Wahrscheinlichkeit dieselbe.

80%

800 Frauen von 1000

8000 Frauen von 10000

- Die korrekte Lösung berechnen wir gleich…

Wer war Bayes?

Ein historischer Exkurs

- Reverend Thomas Bayes (*1702, †1761)
- Englischer Mathematiker und presbyterianischer Pfarrer
- Der Artikel “An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances” wurde 1763 post-mortem veröffentlicht.
  - Darum geht es heute.

Einführung in das Bayes-Theorem

- Tut das weh?
  - Nein, das geht kurz und schmerzlos.

Kurze Wiederholung der Wahrscheinlichkeiten

$$p(X) \quad \in \quad [0;1]$$

Die Wahrscheinlichkeit wird durch eine Zahl zwischen 0 und 1 ausgedrückt.

$$p(A \cup B) \quad = \quad p(A) + p(B)$$

A *oder* B

$$p(A \cap B) \quad = \quad p(A) \cdot p(B)$$

A *und* B

$$p(\bar{A}) \quad = \quad 1 - p(A)$$

nicht-A

Desweiteren: A *und nicht*-A sind stets 1 (eines von beiden trifft also immer ein)

…eigentlich logisch.

$$\Rightarrow \; p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Neu! Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wir schreiben: $p(A|B)$
- Wir lesen:
  - *A unter der Voraussetzung B*
  - oder: *A gegeben B*
- Achtung!
  - Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist nicht kommutativ: $p(A|B) \neq p(B|A)$
  - und nicht dasselbe wie *und*:

$$p(A|B) \neq p(A \cap B)$$

Das Bayes-Theorem

…wie es im Lehrbuch steht:

$$p(A|B) = \frac{p(A) \cdot p(B|A)}{p(A) \cdot p(B|A) + p(\bar{A}) \cdot p(B|\bar{A})}$$

…wie man die Essenz sofort sieht:

$$p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

$$\begin{aligned} & p(A|B) \cdot p(B) \\ = \quad & p(B|A) \cdot p(A) \end{aligned}$$

Das Bayes-Theorem

- Beide Varianten sind äquivalent
- Beweis:

1. Schritt:

B ist unabhängig von A, es trifft also **immer** *A gegeben B* oder *nicht-A gegeben B* ein:

$$
\begin{aligned}
p(B) &= p(B) \cdot 1 \\
&= p(B) \cdot (p(A|B) + p(\bar{A}|B)) \\
&= p(A|B) \cdot p(B) + p(\bar{A}|B) \cdot p(B)) \\
&= p(B|A) \cdot p(A) + p(B|\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Bayes-Theorem

Das Bayes-Theorem

- 2. Schritt:

$$
\begin{aligned}
p(A|B) \cdot p(B) &= p(B|A) \cdot p(A) \\
\Leftrightarrow \quad p(A|B) &= \frac{p(A) \cdot p(B|A)}{p(B)} \quad \text{Einsetzen von (1)} \\
\Leftrightarrow \quad p(A|B) &= \frac{p(A) \cdot p(B|A)}{p(A) \cdot p(B|A) + p(\bar{A}) \cdot p(B|\bar{A})}
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Zusammenfassung

- Die komplizierte Fassung macht nun Sinn
  - Leicht umformbar,
    je nach gegebenen Werten
- Die einfache Fassung ist leicht verständlich
  - …aber unhandlich in der Praxis

▶ Die einfache Fassung merken, die erweiterte verwenden.

Die Bedeutung des Bayes-Theorems

- "Schöne Formel", aber wozu?

Der Satz von Bayes erlaubt
in gewissem Sinn
das Umkehren von Schlussfolgerungen!

Wir kennen die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B…

$$p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

…wollen aber die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A.

…denn | ist nicht kommutativ.

Brustkrebs-wahrscheinlichkeit, II

- Von 10000 Frauen haben 100 Brustkrebs
- 80 Frauen von diesen 100 sind positiv getestet.
- 9900 Frauen haben keinen Brustkrebs, aber 9.6% werden trotzdem positiv getestet.
- 950 Frauen wurden also fälschlicherweise positiv getestet.

Brustkrebs-wahrscheinlichkeit, III

- Also haben 80 Frauen mit positivem Test wirklich Brustkrebs, und 950 nicht.
- Von den 1030 positiv getesten sind also 80 positiv getestet und haben Brustkrebs.
- 80 von 1030 sind 7.8%
- Wer lag richtig?

Jetzt mit Bayes!

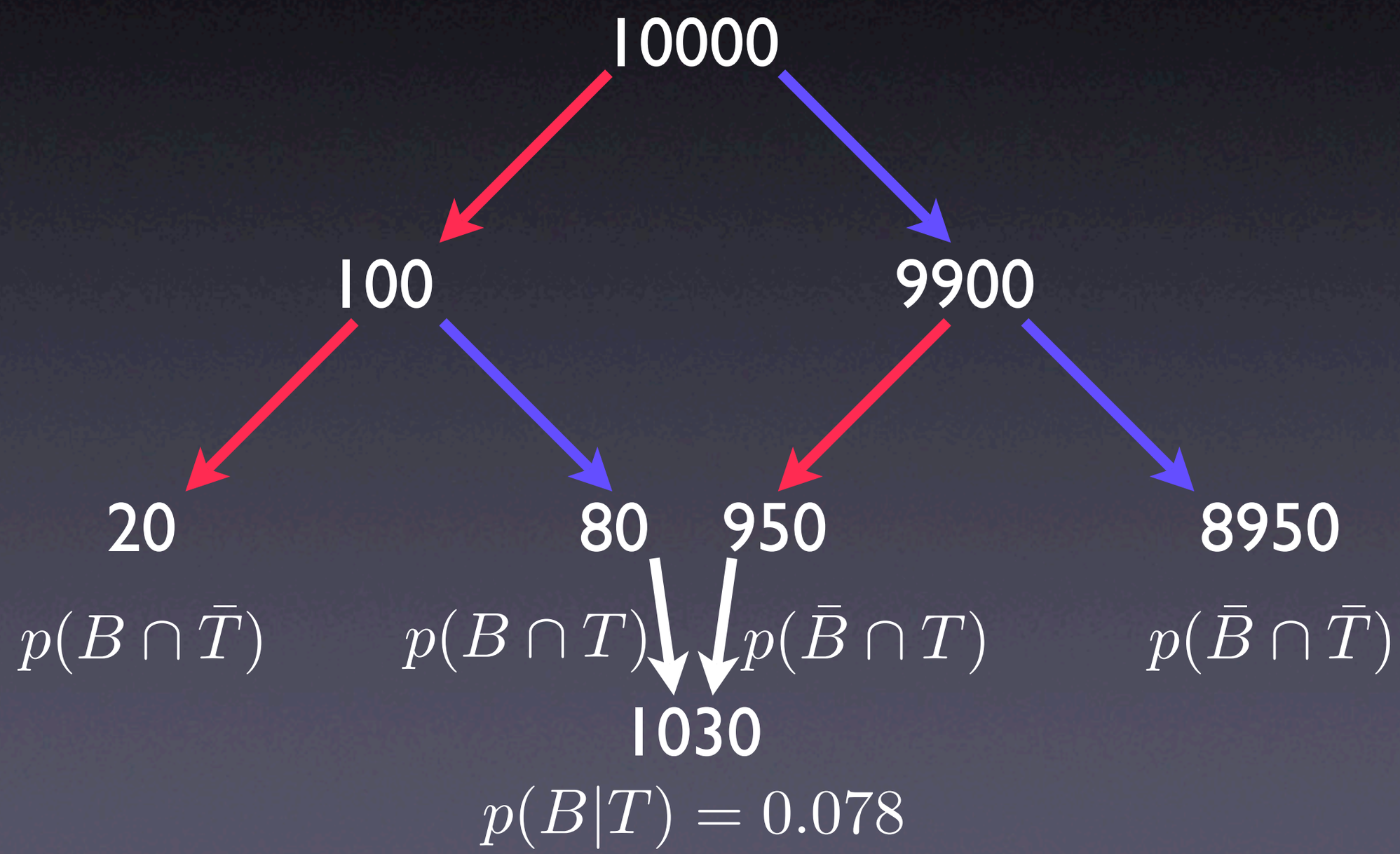
- So rechnen wir das mit Bayes:

$$
\begin{aligned}
p(B) &= 0.01 \\
p(T|B) &= 0.8 \\
p(T|\bar{B}) &= 0.096 \\
p(B|T) &= ?
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(B|T) &= \frac{p(B) \cdot p(T|B)}{p(B) \cdot p(T|B) + p(\bar{B}) \cdot p(T|\bar{B})} \\
&= \frac{0.01 \cdot 0.8}{0.01 \cdot 0.8 + (1 - 0.01) \cdot 0.096} = \frac{0.008}{0.103} \\
&= 0.078
\end{aligned}
$$

Entscheidungsbaum

- Für die, dies gerne bunt mögen:



Riesenrad-Glühbirnen

- Das Riesenrad am Schützenfest verwendet um Geld zu sparen, nur zu 60% Marken-Glühbirnen.
- 5% der Marken-Glühbirnen und 10% der Billig-Glühbirnen sind durchgebrannt.
- Angenommen, ich finde eine durchgebrannte Glühbirne; wie wahrscheinlich war sie eine Markenglühbirne?

$$p(A|B) = \frac{p(A) \cdot p(B|A)}{p(A) \cdot p(B|A) + p(\bar{A}) \cdot p(B|\bar{A})}$$

Eine weitere Anwendung: Spamfilter

- Idee veröffentlicht von Paul Graham, “A Plan For Spam”, 2002.
- Idee kam Graham nach sechs Monaten experimentierens.
- Anwendung von statistischen Mitteln erschien ihm erst abwegig, er hielt sich “schlauer” als die Spammer.

Filter-Training

- Jede Menge Spam und *nicht*-Spam (auch Ham genannt) sammeln
- Für *jedes Wort*, das auftritt, die Vorkommen in Spam und Ham zählen.
- Für jedes Wort berechnen ("Spamlikelihood"):

$p(S_w)$ Wahrscheinlichkeit von w im Spam

$p(\bar{S}_w)$ Wahrscheinlichkeit von w im Ham

$$L_w = \frac{p(S_w)}{p(S_w) + p(\bar{S}_w)}$$

Anwendung des Bayes-Filters

- 15 markanteste Worte suchen:
  - Worte, für die $p(S_w)$ maximal oder minimal ist.
  - Produkt ihrer Likelihoods und Gegen-Likelihoods berechnen:

$$L = L_{w_1} \cdot L_{w_2} \cdot \cdots \cdot L_{w_{15}}$$
$$\bar{L} = \bar{L}_{w_1} \cdot \bar{L}_{w_2} \cdot \cdots \cdot \bar{L}_{w_{15}}$$

Wie funktioniert ein Bayes-Filter?

- Spamquotient berechnen:

$$S = \frac{L}{L + \bar{L}}$$

- Graham definiert:
  - Für S > 0.9: **Spam**
  - Sonst: **Ham**
- In der Praxis kommen noch weitere Feinheiten dazu…

Vorteile von Bayes-Filtern

- Einfach und effektiv
  - Grahams Filter hatte erst mehr Optionen, die jedoch nur wenig/keine Vorteile boten.
- Schwer auszutricksen
- Kombinierbar mit anderen Mitteln (Whitelist, Blacklist, Greylist, etc.)
- Übertragbar, und doch persönlich zugeschnitten

Zusammenfassung

- Das Bayes-Theorem erlaubt das Umkehren von Schlussfolgerungen
- …und erleichtert das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten
- Es gibt viele Anwendungen in der Wissenschaft, aber auch statistisch eher “fernen” Gebieten.

Noch Fragen?

$$p(A|B) = \frac{p(A) \cdot p(B|A)}{p(A) \cdot p(B|A) + p(\bar{A}) \cdot p(B|\bar{A})}$$

Quellen

- http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Theorem
- http://plato.stanford.edu/entries/bayes-theorem/
- http://de.wikipedia.org/wiki/Thomas_Bayes
- http://www.paulgraham.com/spam.html
- http://yudkowsky.net/bayes/bayes.html
- Mehr über Spamfilter auf Anfrage